Préparer l'année de seconde en mathématiques

Inspiré des travaux de l'IREM de Clermont-Ferrand, ce fichier a été élaboré par des professeurs du Lycée Louis Bascan (78), puis complété et remis en forme par les professeurs du Lycée A. Camus.
Il s'agit d'un recueil de méthodes et outils portant sur certains points essentiels du cycle 4.
Il propose des exercices à traiter avant la rentrée pour envisager plus sereinement l'année de seconde en mathématiques.
Ce travail sera d'autant plus efficace si vous le faites avec sérieux, de manière autonome et en ne regardant la solution qu'après avoir fait l'exercice.

Quelques conseils d'organisation :
Echelonner le travail sur une ou deux semaines (4 à 6 exercices par jour), idéalement les deux semaines précédant la rentrée des classes de septembre
S'assurer que l'on maîtrise le cours avant de faire les exercices en s'interrogeant au brouillon sur ce que l'on sait concernant le sujet abordé.
Faire attention au soin et à la rédaction.
Si vous ne réussissez pas à faire un exercice, n'abandonnez pas, relisez votre cours de 3e pour y retrouver un exercice du même type.
Les exercices signalés par des étoiles demandent un peu plus de recherche.

Partie A : CALCULS FRACTIONNAIRES

• Pour additionner et soustraire deux fractions, on doit d'abord les réduire au même dénominateur. On applique ensuite la règle suivante :

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ Pour c non nul

• Pour multiplier deux fractions, on décompose d'abord chacun des numérateurs et dénominateurs en produit de facteurs premiers. Cela permet de simplifier les calculs avant d'appliquer la règle suivante :

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ Pour b et d non nuls

• Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse. Ce qui s'écrit comme cela :

Pour a, b, c et d non nuls

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

<u>Rappel</u> : l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

l'inverse de a est $\frac{1}{a}$

Exercice 1 : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{-5}{7} + \frac{4}{21}$ | $B = \frac{5}{12} - \frac{3}{8}$ | $C = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$ | $D = \frac{-7}{9} \div \frac{6}{-14}$ | $E = \frac{2}{15} + \frac{18}{5} \times \frac{35}{4}$

***Exercice 2** :

Pierre, Jules et Thomas se partagent la fortune de leur père.

Pierre reçoit le tiers de cette fortune, Jules les deux cinquièmes et Thomas hérite du reste.

Quelle fraction de la fortune de son père reçoit Thomas ?

Partie B : DEVELOPPER – FACTORISER

- Développer un produit signifie le transformer en une somme.
- Factoriser une somme signifie la transformer en un produit.
- Pour développer, on distribue la multiplication sur l'addition et la soustraction :
  - Développement simple : k(a + b) = ka + kb et k(a − b) = ka − kb
  - Développement double : (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd
- Pour factoriser, deux méthodes :
  - on repère des facteurs communs (en s'aidant des tables de multiplication notamment ou en remarquant des blocs parenthèses identiques).
  - On utilise l'identité remarquable a² − b² = (a + b)(a − b)

Egalités valables quels que soient les nombres a, b, c, d et k

Exercice 1 : Parmi les expressions suivantes, souligner en bleu les sommes et en vert les produits :

$x+3\times5$; $5x+7$; $4(3x+6)$; $(6x+4)\times5$; $(4x-5)-(7x+3)$; $(x+6)^2$

Exercice 2 : Parmi les expressions littérales proposées, trouver dans chaque cas celle qui convient et la recopier dans le tableau:

❶ $\dfrac{2+x}{2}$; ❷ x^2 ; ❸ $2+\dfrac{x}{2}$; ❹ $2+x$; ❺ $2x$; ❻ $2x+3$; ❼ $x+3\times2$; ❽ $2(x+3)$

	Expression choisie
La somme de 2 et de x	
Le double de x	
Le carré de x	
La somme de 2 et de la moitié de x	
La moitié de la somme de 2 et de x	
La somme de x et du produit de 3 par 2	
Le produit de 2 par la somme de x et de 3	
La somme du produit de 2 par x et de 3	

Exercice 3 : Développer et réduire les expressions suivantes.

$A(x) = (2x-3)(5x-4)$ $B(x) = 2x(5x-3)-7$

*$C(x) = 3x-(x-1)-(x+7)(x+3)$ $D(x) = (x+5)^2$

$E(x) = (6+7x)(6-7x)$ $F(x) = (4x-1)^2$

Exercice 4 : Factoriser les expressions suivantes.

$A(x) = x^2+2x$ $B(x) = 7x(x-4)+(x-4)^2$ $C(x) = 9x^2-12x$

*$D(x) = (x+1)(2x+5)-(x+1)(3x-4)$ $E(x) = 16x^2-1$

*$F(x) = 25-(2x-1)^2$ *$G(x) = (2-x)(3x+1)+(3x+1)$

*__Exercice 5 :__ Effectuer sans la calculatrice et astucieusement les calculs suivants (rédiger les intermédiaires) :

A = 48 × 99 B = 57 × 101 *C = 101²

Partie C : EQUATIONS

- Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'égalité soit vérifiée.
- Équations du premier degré : On regroupe les termes inconnus dans le membre de gauche, puis les termes constants dans le membre de droite, et enfin on divise par le coefficient de l'inconnue.

$$\begin{array}{ccc} & 6x-5=2 & \\ +5 & & +5 \\ & 6x=7 & \\ \div 6 & & \div 6 \\ & x=\dfrac{7}{6} & \end{array}$$

La solution est $\dfrac{7}{6}$.

$$\begin{array}{ccc} & 5x+2=3x-4 & \\ -3x & & -3x \\ & 2x+2=-4 & \\ -2 & & -2 \\ & 2x=-6 & \\ \div 2 & & \div 2 \\ & x=-3 & \end{array}$$

La solution est − 3.

• Équation-produit : Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul.

$(3x - 2)(-x + 7) = 0$
On sait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
Donc : $3x - 2 = 0$ **ou** $-x + 7 = 0$
$3x = 2$ **ou** $-x = -7$
$x = \frac{2}{3}$ **ou** $x = 7$

L'équation admet deux solutions $\frac{2}{3}$ et 7.

$(2 - 3x)(x - 4) - (x - 4)(5 + 2x) = 0$
On factorise :
$(x - 4)((2 - 3x) - (5 + 2x)) = 0$
$(x - 4)(2 - 3x - 5 - 2x) = 0$
$(x - 4)(-5x - 3) = 0$
On sait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
Donc : $x - 4 = 0$ **ou** $-5x - 3 = 0$
$x = 4$ **ou** $-5x = 3$
$x = \frac{-3}{5}$

L'équation admet deux solutions 4 et $\frac{-3}{5}$

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes.

E_1 : $3x - 1 = -13$ E_2 : $-2x + 5 = 8$ E_3 : $5x = 0$

E_4 : $4 - x = 7$ E_5 : $11x - 3 = 2x + 9$ E_6 : $\frac{x}{7} = \frac{-7}{4}$

$E_7 = (-2x - 5)(3x + 2) = 0$

*__Exercice 2 :__ À un semi-marathon, les organisateurs décident de donner une somme d'argent aux trois premiers. Ils se mettent d'accord pour attribuer $\frac{3}{5}$ de la somme totale au vainqueur, $\frac{1}{3}$ au second et 200 € au troisième.
Quelle est la somme totale qu'ils décident de distribuer ?

Exercice 3 : On donne le programme de calcul suivant.

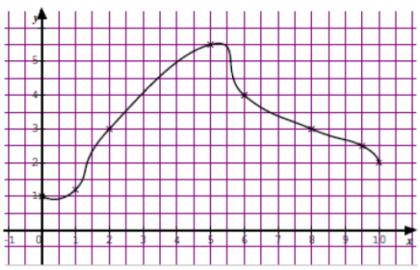
• Choisir un nombre • Ajouter 3 • Calculer le carré du résultat • Soustraire 9	**1.** Montrer que, si on choisit le nombre 4, le résultat obtenu est 40. **2.** Exprimer, en fonction du nombre x de départ, le résultat obtenu avec ce programme de calcul. En développant et en réduisant cette expression, montrer que le résulat du programme est $x^2 + 6x$. **3.** Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ? Justifier.

Partie D : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

• Une **fonction** est un processus qui, à chaque valeur du nombre x, associe un unique nombre y, noté $f(x)$, appelé l'**image de x par f**. On écrit $f : x \mapsto f(x)$

On dit que x est **un antécédent** de y par f lorsque $y = f(x)$.

La **représentation graphique de f** est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x ; f(x))$.



__Exemple 1 :__ le graphique ci-contre définit une fonction f, qui, à chaque nombre x compris entre 0 et 10, associe le nombre $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.
Ainsi $f(2) = 3$, $f(10) = 2$, $f(9{,}5) \approx 2{,}5$.
Les antécédents de 3 par f sont 2 et 8.
1,5 n'a qu'un seul antécédent par f et 6 n'a pas d'antécédent par f.

__Exemple 2 :__ $g : x \mapsto x(2 - x)$. On peut calculer précisément les valeurs des images voulues.
Ainsi $g(2) = 0$, $g(-50) = -2600$. (On a remplacé x par 2 d'abord dans $x(2 - x)$ puis ensuite par -50).
Les antécédents de 0 par g sont 0 et 2. (On a résolu l'équation-produit $x(2 - x) = 0$)

__Exemple 3 :__ Le tableau de valeurs ci-dessous définit une fonction h.

x	−1	3	3,5	0	7	−2
$h(x)$	0	2	−2	2	−5,5	− 1

Ainsi $h(-1) = 0$, $h(7) = -5{,}5$.
Les antécédents de 2 par h sont 3 et 0.

Exercice 1 : On considère une fonction f telle que $f(2) = 5$.

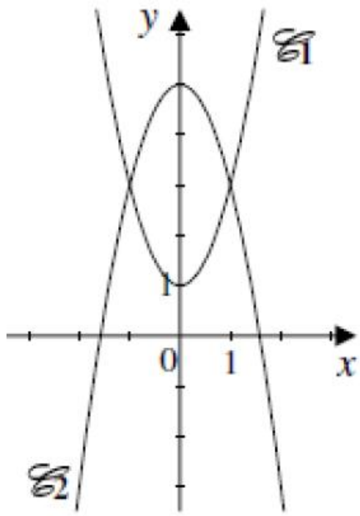
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Répondre en barrant les mauvaises réponses parmi "VRAI", "FAUX" et "On ne peut rien dire.

1.	L'image de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
2.	L'image de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
3.	Un antécédent de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
4.	Un antécédent de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
5.	Un nombre dont l'image est 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
6.	2 a pour image 5 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
7.	Un nombre dont l'image est 7 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
8.	5 a pour antécédent 2 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
9.	2 a pour antécédent 5 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
10.	2 a pour image 7 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
11.	5 a pour image 2 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
12.	Le point de coordonnées (2 ; 5) appartient à $\mathscr{C}$.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire

Exercice 2 : Sur le graphique ci-contre la courbe $\mathscr{C}_1$ représente une fonction f et la courbe $\mathscr{C}_2$ représente une fonction g. Répondre aux questions par lecture graphique (avec la précision permise par le tracé).

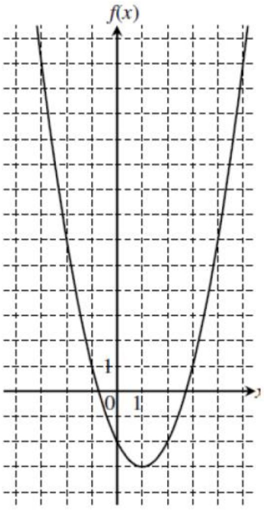
1. Quelle est l'image de 2 par la fonction g ?
2. Quels sont les antécédents de 4 par la fonction g ?
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = g(x)$? Quelle est alors l'image de ces valeurs par f et g ?



Exercice 3 : On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = 4x^2$

1. Déterminer l'image de − 3 par la fonction f.
2. Déterminer l'antécédent de 24 par la fonction f.
3. Déterminer l'image de 3 par la fonction g.
4. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 8 par la fonction g.

Exercice 4 : Le graphique ci-contre représente la fonction f définie par $f(x) = (x - 1)^2 - 3$.



Résolution par lecture graphique

1. Quelles sont les images des nombres 1 et − 2 par f ?
2. Quels sont les antécédents par f du nombre − 2 ?
3. Le nombre − 3 admet-il des antécédents ? (expliquer).

*Résolution par le calcul

1. Calculer l'image par f de 0 et de 2. Quel résultat trouve-t-on ?
2. **a)** Montrer que rechercher les antécédents par f de 13 revient à résoudre l'équation $(x - 1)^2 - 16 = 0$.

   b) Montrer que, pour tout nombre x, on a :

   $(x - 1)^2 - 16 = (x - 5)(x + 3)$.

   c) En déduire les antécédents de 13 par f.

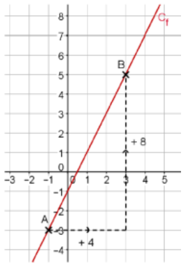
Exercice 5 : On considère une fonction f et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Compléter le tableau suivant.

Égalité	Description : image ou antécédent	Point appartenant à $\mathscr{C}$
$f(-2) = -1$	… est l'image de … par f	(… ; …) ∈ $\mathscr{C}$
$f(\dots) = \dots$	… est l'image de … par f	(5 ; 7) ∈ $\mathscr{C}$
$f(\dots) = \dots$	4 est un antécédent de − 10 par f	(… ; …) ∈ $\mathscr{C}$
$f(\dots) = \dots$	… est un antécédent de … par f	(− 3 ; 2) ∈ $\mathscr{C}$

Partie E : FONCTIONS AFFINES – FONCTIONS LINEAIRES

• Une **fonction affine** est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$
Par exemple :
$f : x \mapsto 2x - 1$ est une fonction affine car elle est de la forme $f(x) = ax + b$
avec $a = 2$ et $b = -1$.

• La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**. Le nombre a est appelé le **coefficient directeur (ou pente)** de la droite.
Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
Par exemple :
Sur la représentation graphique ci-contre, on choisit deux points A et B sur la courbe. En se déplaçant de A vers B, on se dirige de + 4 à l'horizontal et de + 8 à la verticale.



La pente se calcule ainsi : $\dfrac{\text{Déplacement vertical}}{\text{Déplacement horizontal}} = \dfrac{+8}{+4} = 2$
De plus l'ordonnée à l'origine se trouve à l'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées : ici − 1.

On résume : $a = 2$ et $b = -1$. Donc cette représentation graphique est celle de la fonction $f(x) = 2x - 1$.

• Une fonction **linéaire** est de la forme $f(x) = ax$.
Par exemple :
$f : x \mapsto \dfrac{-1}{3}x$ est une fonction linéaire car elle est de la forme $f(x) = ax$ avec $a = \dfrac{-1}{3}$

• La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite qui passe par l'origine du repère**.

• Les fonctions linéaires modélisent des **situations de proportionnalité**.

• Pourcentage et fonctions linéaires

	Prendre 5% de x, c'est multiplier x par 0,05.	Augmenter x de 5% c'est multiplier x par 1,05.	Diminuer x de 5% c'est multiplier x par 0,95.
Expression littérale	5% de x = $0{,}05x$	x + 5% de x $(1 + 0{,}05)x = 1{,}05x$	x − 5% de x $= (1 - 0{,}05)x = 0{,}95x$
Fonction linéaire	$x \mapsto 0{,}05x$	$x \mapsto 1{,}05x$	$x \mapsto 0{,}95x$

Exercice 1 : Parmi ces fonctions, détermine

$f : x \mapsto 4x - 3$ $\qquad g : x \mapsto 5 - 2x$ $\qquad h : x \mapsto 3x^2 + 5$

$i : x \mapsto 4{,}5x$ $\qquad j : x \mapsto -4$ $\qquad k : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

a) Celles qui sont affines ; **b)** Celles qui sont linéaires ; **c)** Celles qui sont constantes ;
d) Celles qui ne sont pas affines.

Exercice 2 : Représenter les fonctions suivantes en expliquant la démarche et les calculs.

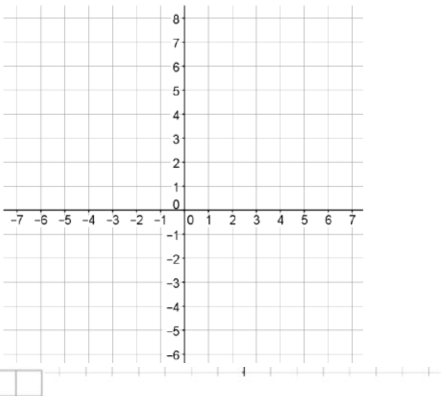
a) $f(x) = -3x$

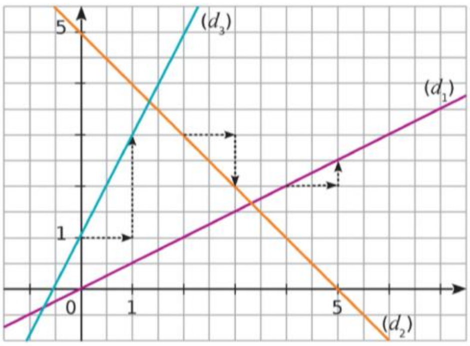
b) $g(x) = -2$

c) $h(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$

d) $i(x) = 2x - 5$

e) $j(x) = \dfrac{-5}{3}x$





Exercice 3 :

Déterminer graphiquement les fonctions représentées par les droites (d_1), (d_2) et (d_3) ci-contre.

Expliquer.

Exercice 4 : Déterminer la fonction linéaire associée à chacune des expressions suivantes.

a) Hausse de 2 % $\qquad$ **b)** Baisse de 40 % $\qquad$ **c)** Prendre 65 %

*__Exercice 5 :__

Baisser une quantité de 2 % deux fois de suite revient-il à la baisser de 4 % ?

*__Exercice 6 :__

Un article coûte 58,40 € après avoir subi une remise de 20 %. Quel était son prix d'origine ?